

Pablo Núñez<sup>1</sup>, Silvia E. Calderón<sup>2</sup> y Salvador Gil<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Industrias de la Universidad Nacional de Gral. Sarmiento, Buenos Aires;  
Instituto San José de Morón, Buenos Aires.*

<sup>2</sup>*Instituto Superior del Profesorado J.V. González. Ayacucho 632 –Buenos Aires.*

<sup>3</sup>*Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, M. de Irigoyen 3100,  
San Martín (1650), San Martín, Buenos Aires.*

**E-mail:** [sgil@unsam.edu.ar](mailto:sgil@unsam.edu.ar)

(Recibido el 17 de Marzo de 2009; aceptado el 10 de Mayo de 2009)

## Resumen

En el presente trabajo se recrean métodos geométricos clásicos que permiten estimar las distancias de la Tierra a la Luna, al Sol, y los diámetros del Sol y la Luna en relación al radio terrestre. También se indica cómo medir la distancia del Sol al resto de los planetas y la necesidad de suponer órbitas elípticas para los mismos. La técnica propuesta para estas estimaciones hace uso de imágenes digitalizadas de eclipses disponibles en Internet o bien tomadas oportunamente durante algún eclipse de Luna. Las medidas de los diámetros y distancias astronómicas obtenidas con el método propuesto, son consistentes con los conocidos para estas magnitudes. Esta actividad es accesible tanto para estudiantes universitarios principiantes como para los de escuelas medias. El objetivo que perseguimos es intentar responder a la preguntas, ¿cómo sabemos esto?, ¿por qué sostenemos aquello? La técnica propuesta ilustra un modo de combinar los métodos clásicos con tecnologías modernas.

**Palabras clave:** Sistema solar, medición de distancias astronómicas, nuevas tecnologías.

## Abstract

In this work we discuss classical geometrical models that allow us to estimate the distances from the Earth to the Moon, the Sun, and the diameters of the Sun and the Moon in relation to the Earth diameter. We also indicate how to obtain the distance from the Sun to the rest of the planets and the need of elliptical orbits for the planets. Our aim was to answer the questions: How do we know this? Why do we support this idea? The experimental technique to carry out these estimations makes use of digital images of eclipses available through Internet or taken with a digital camera during a lunar eclipse. The measured astronomical distances and sizes are consistent with best values obtained for these magnitudes. This activity is accessible to beginner university students and High school students. The proposed technique illustrates a way of combining classical methods with modern technologies.

**Keywords:** Solar system, astronomic distances measurements, new technologies.

**PACS:** 01.40Ej, 01.40Fk, 01.65+g, 96.90+c, 07.07.Hj, 96., 96.20.-n

**ISSN 1870-9095**

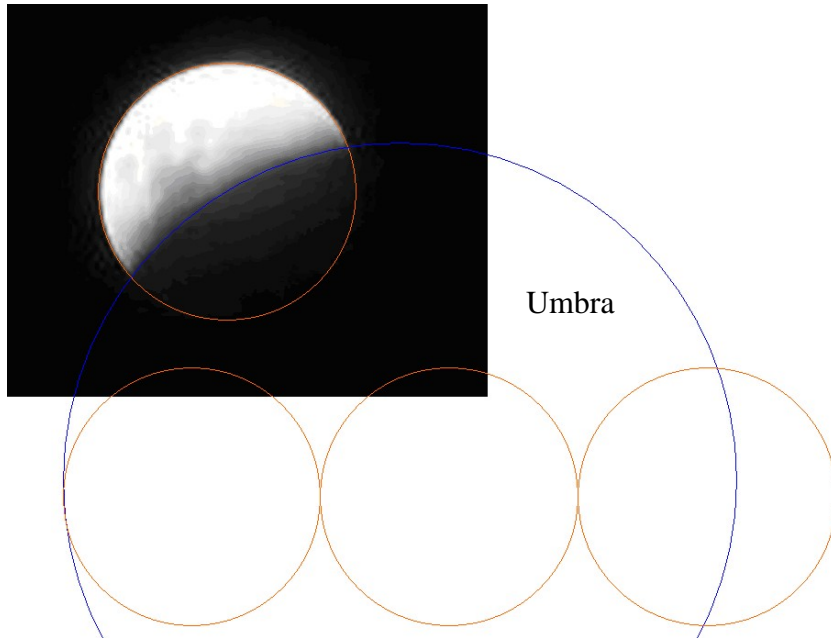
## I. INTRODUCCIÓN: TAMAÑO DE LA LUNA

Cuando observamos un eclipse de Luna, la sombra proyectada por la Tierra sobre la Luna revela la forma esférica de la Tierra y además nos da una idea del tamaño de nuestro planeta comparado con el de la Luna (ver Fig.1). Esta fue una de las observaciones en la que se basó Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) para argumentar la redondez de la Tierra. Aristarco de Samos (310 a.C. – 250 a.C.) fue también uno de los grandes filósofos griegos que contribuyó significativamente para la comprensión de la posición de la Tierra en el cosmos. Fue un precursor del modelo heliocéntrico del Sistema Solar y se desempeñó como director de la famosa Biblioteca de Alejandría, uno de los centros de estudio más importantes del mundo clásico. Aristarco ideó un ingenioso método para medir el tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra comparando el tamaño de la sombra de la Tierra con el de la Luna durante

un eclipse lunar. Por simple observación visual, Aristarco estimó que el diámetro de la sombra de la Tierra era aproximadamente el doble del diámetro lunar.

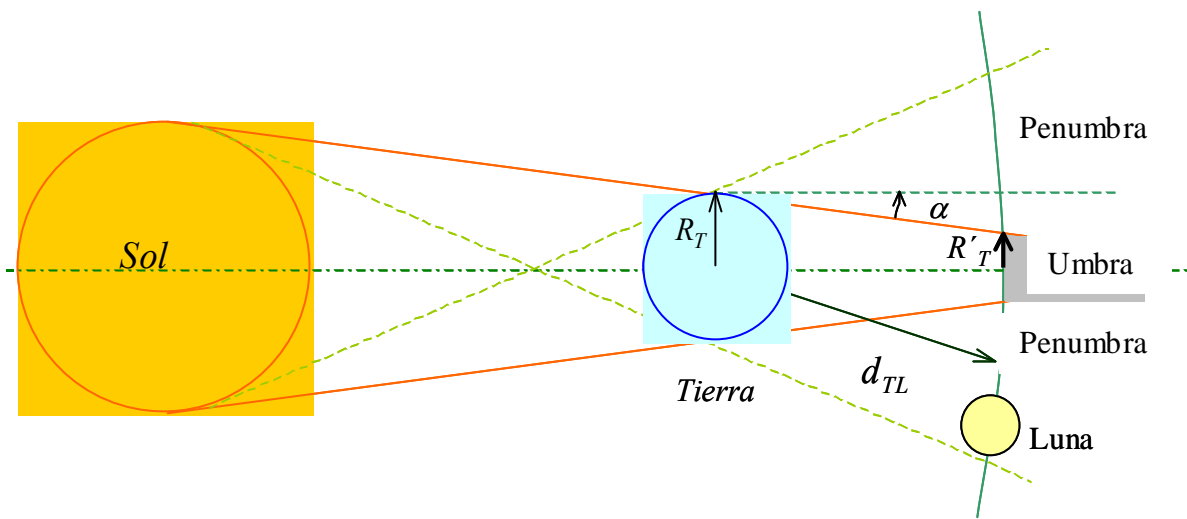
Dada la posibilidad de fotografiar estos eventos y de obtener estas fotos de eclipses de Internet [1], resulta muy simple e instructivo usar la tecnología moderna para recrear y mejorar las estimaciones de Aristarco. En la Fig.1 se ilustra una foto de un eclipse lunar ocurrido el 20 de febrero de 2008 en la Ciudad de Buenos Aires obtenidas con una cámara digital común (Sony CyberShot 5.0). Utilizando programas de graficación comunes en la mayoría de las computadoras personales es posible realizar mediciones a partir de fotogramas [2, 3] como el de la Fig.1. El resultado obtenido usando esta técnica resultó:

$$R_T' / R_L = k \approx 2,5 \pm 0,3 . \quad (1)$$



**FIGURA 1.** Fotografía correspondiente al eclipse lunar del 20 de febrero del 2008. La luna está en la umbra de la Tierra. Se ha trazado una circunferencia para completar la sombra de la Tierra. De la figura obtuvimos la relación  $R'_T/R_L=k=2.5\pm 0.3$ .

1

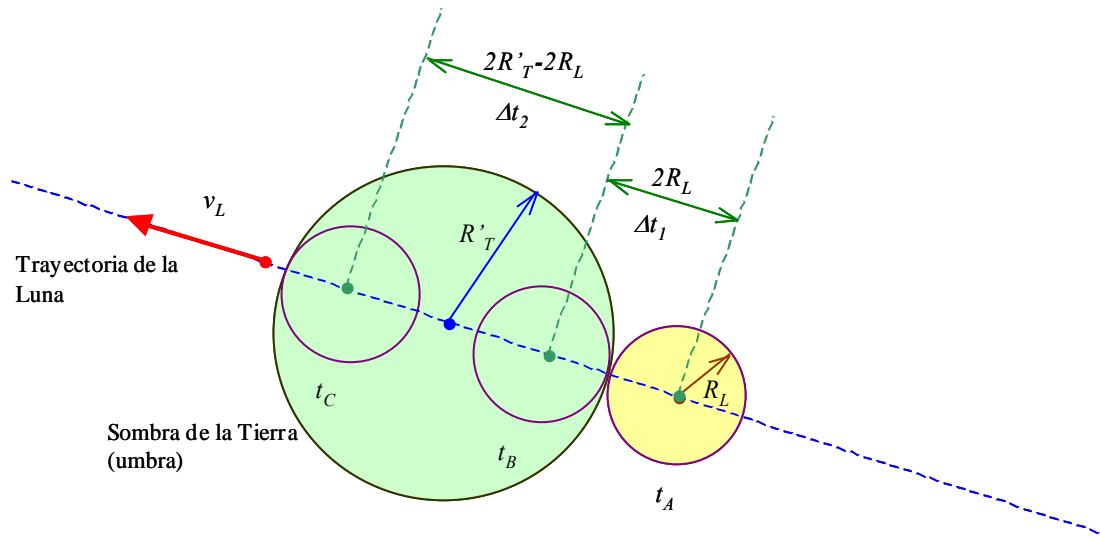


**FIGURA 2.** Sistema Sol, Tierra y Luna.  $R_T$  es el radio de la Tierra y  $R'_T$  el de su sombra a una distancia igual al de la Tierra a la Luna ( $d_{TL}$ ).  $\alpha$  es al ángulo de apertura del cono de sombra de la Tierra (umbra).

La incerteza en este último resultado, proviene fundamentalmente de la variación que se obtiene entre distintos intentos de definir el tamaño de la sombra de la Tierra. Este valor es muy próximo al aceptado para esta relación [4, 5, 6]. Nótese que el radio de la Tierra  $R_T$  no es el mismo que el radio  $R'_T$  de la sombra de la Tierra. Debido al gran tamaño del Sol comparado con el de la Tierra, la zona más oscura de la sombra (umbra) de la Tierra tiene una forma cónica como se ilustra en la Fig. 2. En la antigüedad hacia el año 240 AC, Eratóstenes midió el radio terrestre  $R_T$  y en los últimos años se realizaron numerosos proyectos en escuelas de varios países del mundo tratando de recrear su método para medir el tamaño de la Tierra. [7].

Algunos años más tarde, Hiparco de Nicea (190 a.C. – 120 a.C.) ideó un cálculo del diámetro lunar más preciso que el de Aristarco. Hiparco nace poco antes de la muerte de Eratóstenes y más tarde le sucede en la dirección de la Biblioteca de Alejandría. La idea de Hiparco consiste en inferir la relación del tamaño de la Luna, respecto de la sombra de la Tierra, a partir de la observación de los tiempos involucrados en un eclipse lunar, en vez de los tamaños relativos como lo hizo Aristarco. El método de Hiparco se basa en que durante un eclipse lunar el módulo de la velocidad de la Luna,  $v_L$ , es aproximadamente constante. Para obtener resultados coherentes con el método de Hiparco, es importante que la

trayectoria de la Luna pase por el centro de la sombra de la Tierra, condición que no siempre se cumple [1].



**FIGURA 3.** Esquema de un eclipse lunar.  $R'_T$  es el radio de la sombra de la Tierra y  $R_L$  es el radio de la Luna. Para aplicar el método de Hiparco, es importante que la trayectoria de la Luna pase por el centro de la sombra de la Tierra.

Es sencillo encontrar un eclipse que cumple esta condición en el catálogo de eclipses lunares de la NASA como el representado en la Fig. 4. Analizando la Fig. 3 y considerando la constancia del módulo de la velocidad de la Luna:

$$v_L = \frac{2R'_T - 2R_L}{(t_C - t_B)} = \frac{2R_L}{(t_B - t_A)}, \quad (2)$$

definiendo los intervalos de tiempo:

$$\Delta t_1 = t_B - t_A; \quad \Delta t_2 = t_C - t_B; \quad \text{y} \quad \Delta t_3 = t_C - t_A = \Delta t_2 + \Delta t_1, \quad (3)$$

tenemos:

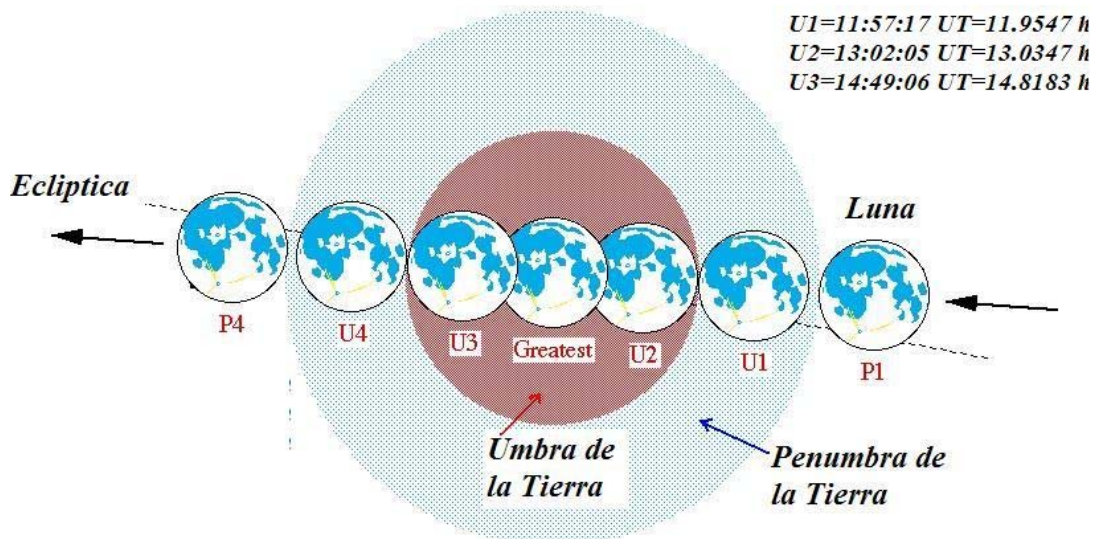
$$\frac{R'_T - R_L}{\Delta t_2} = \frac{R_L}{\Delta t_1} = \frac{R'_T}{\Delta t_1 + \Delta t_2}, \quad (4)$$

o bien:

$$R'_T / R_L = k = \Delta t_3 / \Delta t_1. \quad (5)$$

Utilizando los datos del eclipse ilustrado en la Fig.4, tenemos:

$$R'_T / R_L = k = 2,864 / 1,080 = 2,651 \pm 0,005. \quad (6)$$



**FIGURA 4.** Información del eclipse del 16 de julio de 2000 colectada por NASA [1]. El tiempo de U1 a U2 ( $\Delta t_1 = 1,080$  h) es el tiempo de oscurecimiento de la Luna. El tiempo entre U2 y U3 es la duración del eclipse total ( $\Delta t_2 = 1,7836$  h). En este eclipse, la trayectoria de la Luna pasa muy próxima al centro de la sombra de la Tierra.

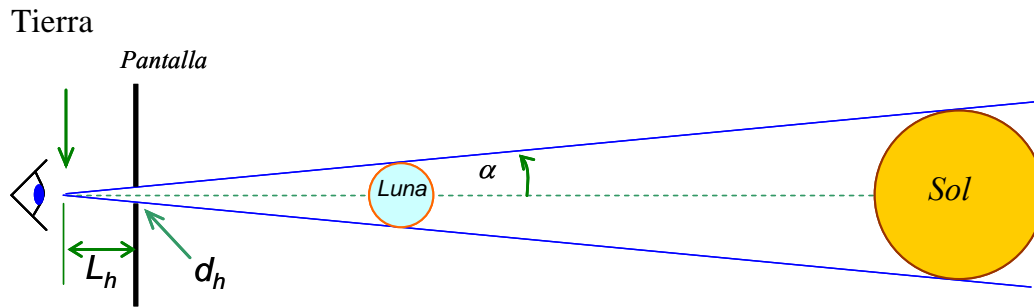


FIGURA 5. Tamaño aparente o ángulo sustentado por la Luna y el Sol desde la Tierra.

Obsérvese que este dato es consistente con el valor obtenido usando el método de Aristarco, Ec. (1), pero con mucha mayor precisión. La mayor precisión del método de Hiparco respecto del ideado por Aristarco se debe a que los tiempos involucrados en los eclipses se miden en horas y los instantes de inicio y terminación de los mismos se pueden determinar con incertezas de pocos segundos. De este modo las mediciones tienen precisiones del orden de 1 en 1000 aproximadamente.

## II. DISTANCIA TIERRA-LUNA

Cuando observamos un eclipse total de Sol [1], la Luna alcanza a eclipsar al Sol en forma muy ajustada, por lo tanto resulta claro que el diámetro aparente (o los ángulos subtendidos) de la Luna y el Sol son iguales como se muestra en la Fig. 5. Por lo tanto:

$$\alpha = R_L / d_{TL} = R_S / d_{TS} . \quad (7)$$

Aquí  $R_S$  y  $d_{TS}$  son el radio del Sol y la distancia Tierra-Sol respectivamente y  $2\alpha$  es el ángulo subtendido por la Luna. Un modo de estimar  $\alpha$  es tomar una pantalla opaca (de metal o plástico) y realizar una perforación circular de diámetro  $d_h$  conocido. Una manera práctica y sencilla de fabricar la pantalla consiste en usar una tarjeta plástica como las de compra o crédito y con una mecha de tamaño conocido (de 1 o 2 mm), perforar la misma. Sosteniendo la pantalla con la mano y mirando la Luna a través del orificio, el ángulo subtendido se logra cuando la totalidad de la Luna coincide con el tamaño de la perforación. Se mide la distancia  $L_h$  de la pantalla a nuestro ojo y se calcula el ángulo  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d_h}{2L_h} \approx \frac{1}{210} \text{ rad} \approx 0,27^\circ \pm 0,03^\circ ,$$

Este ángulo también puede obtenerse por el método de Hiparco. Como el módulo de la velocidad de la Luna es constante:

$$2R_L / (t_B - t_A) = 2R_L / \Delta t_1 = 2\pi d_{TL} / T_{Luna} , \quad (8)$$

donde  $T_{Luna}$  es el período sinódico lunar ( $T_{Luna} = 29,53\text{d}$ ). El periodo al que debemos referirnos en este caso, es el asociado al movimiento de la Luna en la sombra de la Tierra, el cual depende de la rotación de la Luna alrededor de la Tierra y de la traslación de ésta alrededor del Sol. El período sinódico es el tiempo entre dos fases iguales consecutivas. Este período es el tiempo que tarda la Luna en volver a aparecer en el mismo punto del cielo relativo al Sol y para la Luna es  $T_{Luna} = 29,53$  d. Este período no debe confundirse con el período sideral, que es el tiempo que tarda la Luna en recorrer  $360^\circ$  respecto de las estrellas lejanas,  $T_{sideral} = 27,3216$  d.

Por lo tanto, de la Fig. 3 y la Ec. (8) tenemos:

$$2\alpha = 2R_L / d_{TL} = 2\pi(\Delta t_1 / T_{Luna}) \approx 0,00958 \text{ rad} , \quad (9)$$

es decir  $\alpha \approx 0,274^\circ \pm 0,002^\circ$ , que es consistente con el valor obtenido con la pantalla perforada, pero más preciso. Reemplazando en la expresión (8) los valores medidos de  $\Delta t_1$  y  $T_{Luna}$ , la misma se puede escribir como:

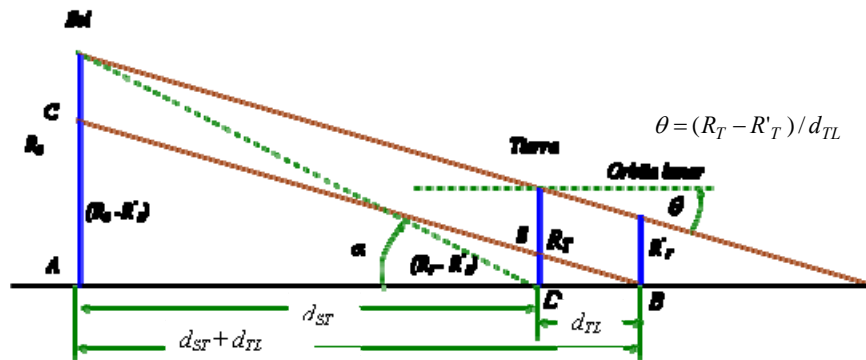
$$R_L = d_{TL} / 208,7 . \quad (10)$$

El esquema de la Fig. 2 también puede representarse como se ilustra en la Fig. 6. Debido a que los eclipses de Sol existen, esto evidencia que la distancia de la Tierra al Sol es mayor que la distancia Tierra-Luna. Suponemos que:

$$d_{TS} = f \cdot d_{TL} \text{ con } f > 1 . \quad (11)$$

Combinando esta relación con Ec. (7)

$$R_S / R_L = d_{TS} / d_{TL} = f . \quad (12)$$



**FIGURA 6.** Sistema Sol, Tierra y Luna.  $R_T$  es el radio de la Tierra y  $R'_T$  el de su sombra a una distancia igual al de la Tierra a la Luna ( $d_{TL}$ ).  $\theta$  es el ángulo de apertura del cono de sombra de la Tierra (umbra),  $\alpha$  es el ángulo visual del radio solar, observado desde la Tierra.

Por el momento, supondremos que  $f \gg 1$ , pronto justificaremos esta suposición. Teniendo en cuenta que los triángulos  $BAC$  y  $BDE$  (Fig.6) son semejantes, tenemos:

$$\frac{R_s - R'_T}{d_{TL}(1+f)} = \frac{R_T - R'_T}{d_{TL}} \quad (13)$$

Combinando esta expresión con (6) y (12):

$$R_L = \frac{(1+f)}{f(1+k)} R_T \approx \frac{1}{(1+k)} R_T \quad (14)$$

De manera análoga, de la Ec. (6) tenemos:

$$d_{TL} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{T_{Luna}}{\Delta t_1} \right) \cdot R_L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{T_{Luna}}{\Delta t_1} \right) \cdot \frac{1}{(1+k)} R_T \quad (15)$$

De estas dos últimas expresiones se desprende que, conociendo el radio terrestre  $R_T$ , el periodo lunar (sinódico)  $T_{Luna}$  y midiendo los tiempos del eclipse lunar  $\Delta t_1$  y  $\Delta t_2$ , (Fig. 2), podemos determinar el tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra. Tomando como base los datos del eclipse del 16 de julio de 2000 (Fig.4) tenemos:

$$R_L \approx 1750 \pm 50 \text{ km} \text{ y } d_{TL} \approx 365\,400 \pm 500 \text{ km} \quad (16)$$

Estos valores se comparan bien con los mejores valores actuales, dentro del 1% el primero y del 5% el segundo [8, 9].

La Ec.(5) puede reescribirse como:

$$\frac{2R_L}{\Delta t_1} = \frac{2R'_T}{\Delta t_3} = \frac{2\pi d_{TL}}{T_{Luna}} \quad (17)$$

o sea

$$R'_T = \pi d_{TL} \left( \frac{\Delta t_3}{T_{Luna}} \right) \quad (18)$$

Combinando esta expresión con (14) tenemos:

$$\theta = \frac{R_T - R'_T}{d_{TL}} = \pi \left[ \frac{\Delta t_1}{T_{Luna}} \right] \cdot (1+k - \Delta t_3 / \Delta t_1) \quad (19)$$

Utilizando los datos de la Fig. 4, obtenemos:

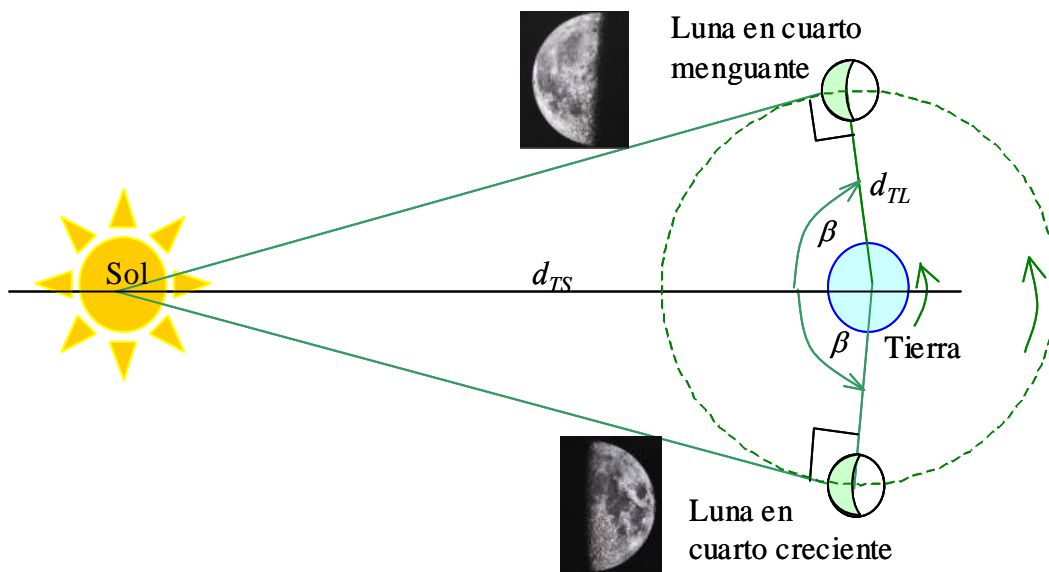
$$\theta(\text{rad}) \approx 1/208 \text{ rad o } \theta \approx 0,275^\circ \quad (20)$$

Este valor concuerda dentro del 4% con los valores de tabla [1, 14]. Vemos además que como  $\theta \approx \alpha$ , de la Fig. 6 se infiere que  $f \gg 1$ .

### III. DISTANCIA TIERRA-SOL

Aristarco de Samos no solo estimó el tamaño de la Luna, sino que además ideó un ingenioso esquema para medir la distancia al Sol. En la Fig. 7 se representa la posición de la Luna en dos fases complementarias: cuarto creciente y cuarto menguante. Cuando la Luna está en estas posiciones, el triángulo formado por el Sol, la Luna y la Tierra es rectángulo, como se aprecia en el dibujo. Esto ocurre tanto en cuarto menguante como en cuarto creciente [10, 11].

Si el Sol estuviese infinitamente alejado de la Tierra ( $d_{ST} \gg d_{TL}$ ) estas dos posiciones se alcanzarían a la mitad del periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra. El método propuesto por Aristarco para medir el ángulo  $\beta$  de la Fig. 7 consiste en medir el tiempo  $T_c$  entre las posiciones complementarias o sea el tiempo entre cuarto menguante y cuarto creciente. Del hecho dado que el módulo de la velocidad de la Luna es aproximadamente constante se deduce que:



**FIGURA 7.** Fases de la Luna.  $d_{TS}$  es la distancia Sol-Tierra,  $\beta$  es el ángulo para el cual la Luna está en cuarto menguante (CM) y en cuarto creciente (CC) son complementarias. La suma de las mitades da la Luna completa.

$$\frac{2\beta}{360^\circ} = \frac{T_C}{T_{luna}} \quad (21)$$

Usando esta técnica, Aristarco concluyó que  $\beta \approx 87^\circ$  [10,11]. Por lo tanto de la resolución de los triángulos correspondientes:

$$\cos \beta = d_{TL}/d_{ST} \Rightarrow \cos(87^\circ) \approx 0.052 \approx 1/19, \quad (22)$$

o sea:

$$d_{ST} \approx 19d_{TL} \quad (23)$$

Si tomamos para  $T_C=14.5$  días (nótese que para ver la luna en cuarto creciente y luego en cuatro menguante transcurrir un número entero de días más medio día, ya que la Luna esta de lados opuestos a la Tierra en estas dos fases). Con este dato de  $T_C$  resulta  $\beta \approx 88,4^\circ$  y  $d_{ST}/d_{TL} \approx 35$ . Hoy sabemos que la relación  $d_{ST}/d_{TL} \approx 400$  y por lo tanto  $\beta \approx 89,85^\circ$ . La precisión necesaria para medir este ángulo es del orden de  $0,02^\circ$  y con el método de Aristarco es casi imposible de lograr esta precisión. Lo interesante de este método, es que ofreció por primera vez, un modo para estimar la distancia de la Tierra al Sol y además logró estimar aproximadamente el orden de magnitud de esta distancia. La limitación de este procedimiento es que la mínima variación de ángulo posible de medirse es  $1/2$  día [10], lo que produce de la menor diferencia de ángulo posible de medirse es  $\Delta\beta \approx (0.5d/29d) \cdot 360^\circ \approx 7^\circ$ . Con lo cual, lo más que podemos decir es que  $d_{TS}/d_{TL} \approx 19$ .

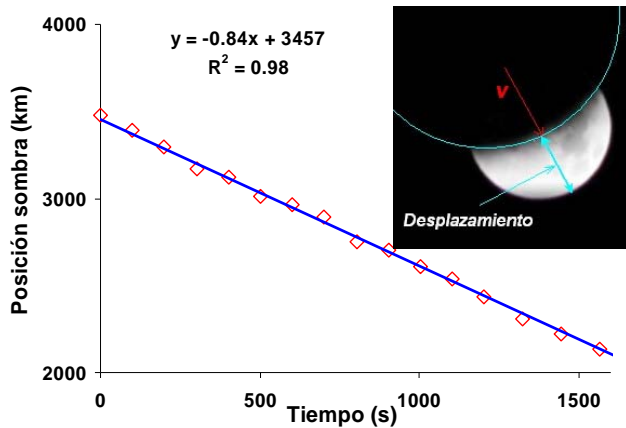
Como se indicó previamente, los ángulos subtendidos por el Sol y la Luna desde la Tierra son idénticos. De este hecho se deduce que  $R_L/d_{TL}=R_s/d_{ST}$ , de donde obtenemos:

$$\text{Radio del Sol [km]} = R_s = (d_{ST}/d_{TL}) \cdot R_L \geq 33000 \text{ km} \quad (24)$$

El valor aceptado para el radio del Sol es:  $R_s=6.955 \times 10^5 \text{ km}$  [4, 14].

#### IV. MOVIMIENTO DE LA LUNA

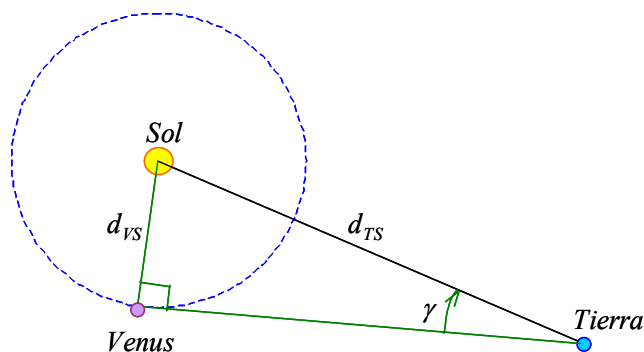
Una hipótesis implícita en el método de Hiparco, para determinar la distancia y tamaño de la Luna, es que la Luna se mueve con velocidad de módulo constante. ¿Cómo podemos poner a prueba esta hipótesis? A partir del video Total Lunar Eclipse February 20<sup>th</sup>, 2008 de Youtube [12] se puede determinar la rapidez relativa de la Luna respecto de la sombra de la Tierra analizando cuadro por cuadro. En este video el autor muestra en 8 segundos los 78 minutos del inicio del eclipse, en los siguientes 5 segundos los 50 minutos del eclipse total y luego los 8 segundos restantes donde se muestran los 78 minutos del final del eclipse [1], lo que significa que cada segundo del video representa unos 10 minutos del tiempo real del eclipse. Los valores de la posición de la sombra se calibran a partir del dato del diámetro lunar [9]. Con estas consideraciones y analizando el video cuadro por cuadro se obtiene el gráfico de la Figura 8. Esta figura muestra que una recta ajusta bien los datos obtenidos del desplazamiento en función del tiempo, por lo que la rapidez de la Luna respecto de la sombra resulta constante. El valor hallado para la velocidad relativa de la sombra respecto de la Luna, se encuentra dentro del orden esperado, cercano a 1 km/s.



**FIGURA 8.** Posición de la sombra del eclipse respecto del borde de la Luna o equivalentemente de la Luna respecto de la sombra terrestre. En la figura inserta en el gráfico se indica como se determina este desplazamiento. La pendiente de este gráfico nos da la rapidez con la que se desplaza la Luna en la umbra.

## V. DISTANCIA VENUS-SOL Y MERCURIO-SOL

Venus es el segundo planeta del Sistema Solar y junto con el Sol y la Luna, uno de los tres cuerpos celestes que puede ser visto de día. Es visible en las cercanías del Sol, a veces en los amaneceres y otras en los atardeceres. Siempre en las cercanías del Sol visto desde la Tierra. La *elongación* de un planeta se define como la separación angular entre visual al Sol y la visual a dicho planeta. Para Venus la elongación tiene un máximo que ocurre cuando el Sol, Venus y la Tierra forman un triángulo rectángulo como el que se muestra en la Fig. 9. Una situación análoga ocurre con Mercurio, pero este planeta no es visible tan fácilmente como Venus.



**FIGURA 9.** Posición de Venus en su punto de máxima elongación o separación angular respecto del Sol. Observacionalmente esto ocurre cuando Venus está más alejado del Sol en el cielo y parece estacionario, ya que se mueve a lo largo de una línea recta respecto de la Tierra. El triángulo formado por el Sol, Venus y la Tierra es rectángulo.

El ángulo de máxima elongación puede obtenerse fácilmente con un telescopio, observando la posición de Venus a lo largo del tiempo. En realidad cuando se observa a Venus con un telescopio, se pueden ver fácilmente sus

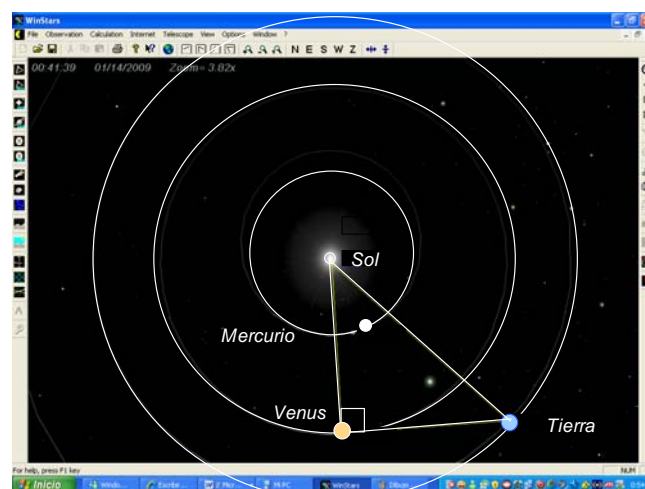
*Midiendo el Sistema Solar en el aula*

fases, similares a las de la Luna. En particular, en la posición de elongación máxima, la fase de Venus es similar a un cuarto creciente o menguante. Para simplificar el método y hacerlo susceptible de emplear el mismo en el aula, nuestra propuesta consiste en utilizar alguno de los múltiples programas de astronomía que se pueden adquirir en el mercado o bajar gratuitamente de Internet. Para determinar el ángulo y el momento en que esto ocurre utilizamos el programa Win Stars 1.0 [13]. Este programa permite simular el movimiento orbital de los planetas (Fig. 10) y determinar el momento en que Venus (o Mercurio) están en su posición de máxima elongación. También puede ser útil utilizar simulaciones del movimiento de estos planetas, disponibles en varias páginas de Internet, en particular en Astronomy Education de la University of Nebraska [14]. De este programa puede obtenerse la fecha de ocurrencia, la posiciones angulares del Sol y los planetas con lo que podemos determinar el ángulo  $\gamma$  (ver Fig. 9). En particular, esta situación ocurre con Venus el día 14 de enero del 2009. El ángulo de máxima elongación resulta:  $\gamma = 46^\circ \pm 2^\circ$  (ver Fig. 10), con lo cual resolviendo resulta:

$$d_{VS} = d_{TS} \text{sen} \gamma \quad (25)$$

Considerando que distancia Tierra-Sol,  $d_{TS}$ , también llamada UA (unidad Astronómica), es de  $149,6 \cdot 10^6$  km, obtenemos  $d_{VS} = (106 \pm 3) 10^6$  km. Este valor es razonable ya que la distancia conocida es de  $(108,2 \pm 0,1) 10^6$  km [14, 15].

De igual manera podemos proceder para hallar la distancia de Mercurio al Sol. Para el día 26 de abril de 2009, el ángulo de máxima elongación de Mercurio es  $\gamma = 19^\circ$  con lo cual resolviendo resulta:  $d_{SM} = 50 \times 10^6$  km. Este valor es razonable ya que la distancia conocida es de  $57.9 \times 10^6$  km. [14, 15]



**Figura 10.** Esquema que muestra las posiciones respectivas del Sol, Venus y Tierra, obtenidas por simulación en el soft ware Winstar 1.0. Las posiciones corresponden al 14 de enero del 2009 y el ángulo de elongación máxima  $\gamma$  puede medirse sobre la pantalla u obtenerse a través de las especificaciones provistas por el programa para el planeta a estudiar en dicha fecha.

Un hecho notable se observa cuando se analiza una tabla de elongaciones para Venus y Mercurio para distintas ocurrencias de las máximas elongaciones [15, 16] debido a que éstas varían constantemente, en particular para el caso de Mercurio. Si el modelo Copernicano, de órbitas circulares, centradas en el Sol, fuese correcto, estas elongaciones deberían ser siempre las mismas. El hecho que no lo sean indican claramente que las órbitas de los planetas no están bien descritas por el modelo de Copérnico y debemos adoptar otro modelo mejor. De hecho, estas variaciones de las máximas elongaciones pueden ser usadas para tazar las órbitas de los planetas, y “descubrir” que las mismas son elípticas, tal como lo establece el modelo de Kepler. De hecho esta actividad se describe en la referencia [17].

## VI. DISTANCIA A OTROS PLANETAS

El método propuesto en la última sección no puede usarse para los planetas más externos a la Tierra. Es posible sin embargo usar un método geométrico muy simple, basado en la observación de los tiempos en que los planetas están en *oposición* (es decir alineados del mismo lado del Sol o sea su elongación es  $180^\circ$ ) y cuando están en *cuadratura* (las visuales al Sol y al planeta forman un ángulo de  $90^\circ$  o sea la elongación del planeta es de  $90^\circ$ ). En la Fig. 11 se muestran estas dos situaciones para la Tierra y Marte. De esta figura es claro que:

$$d_{MS} = d_{TS} / \cos(\alpha - \beta). \quad (26)$$

Para determinar los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se mide el tiempo,  $T_{CC}$ , entre la oposición y la cuadratura. Si Los períodos siderales de la Tierra y Marte son  $T_{Tierra}$  y  $T_{Marte}$  respectivamente, tenemos:

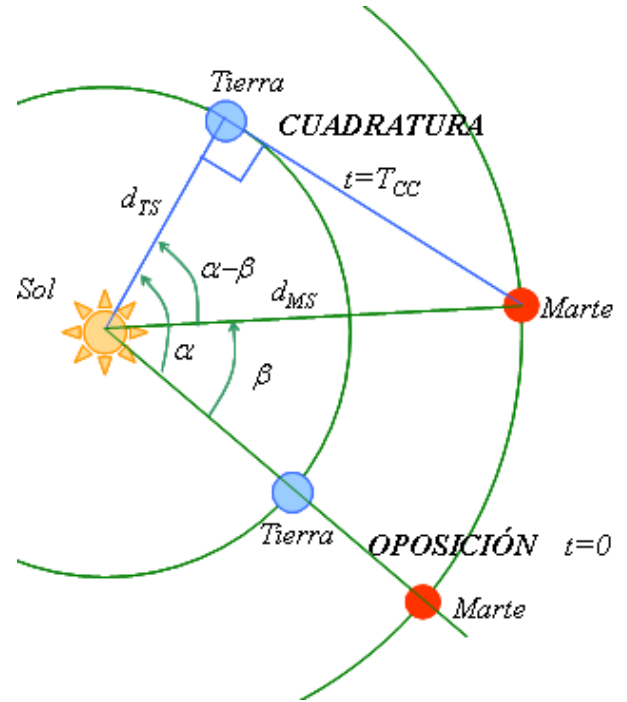
$$\alpha = 360^\circ \times (T_{CC} / T_{Tierra}), \quad (27)$$

y

$$\beta = 360^\circ \times (T_{CC} / T_{Marte}). \quad (28)$$

Es claro que combinando estas dos últimas expresiones con la Ec. (26) podemos determinar las distancias a todos los planetas del sistema solar [14].

Las fechas entre la oposición y la cuadratura de los planetas se pueden obtener en Internet [18] o a partir de programas de simulación del movimiento planetario [12,14].



**Figura 11.** Posiciones del Sol, la Tierra (T) y un planeta exterior, por ejemplo Marte (M) en dos momentos: en conjunción y en cuadratura.

## VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se recrean métodos clásicos simples que permiten obtener distancias y tamaños del Sol, la Luna, y el resto de los planetas del sistema solar, con relación al radio terrestre. También del análisis de las elongaciones máximas de los planetas internos, surge la necesidad de suponer orbitas elípticas para los mismos. Esta actividad educativa intenta responder las preguntas ¿cómo sabemos esto? y ¿por qué sostenemos aquello? que constituyen las bases de la investigación científica. Las técnicas propuestas para estas estimaciones hacen uso de imágenes digitalizadas de eclipses disponibles en Internet o bien tomadas oportunamente durante algún eclipse de Luna, junto a programas de acceso libre en Internet. Los resultados obtenidos están en buen acuerdo con los valores conocidos para estos parámetros.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la atenta lectura del manuscrito y las sugerencias realizadas por A.E. Schwint y M. Mayochi. También a la Asociación Física Argentina por la asistencia otorgada a través del Proyecto INVOFI, que permitió para desarrollar este proyecto.

**REFERENCIAS**

[1] NASA Eclipse Home Page. Página de la NASA dedicada a los eclipses lunares <http://eclipse.gsfc.nasa.gov/lunar.html>. Consultada el 13 de marzo de 2009.

[2] Gil, S., Reisin, H. D. y Rodríguez, E. E., *Using a digital camera as a measuring device*, Am. J. Phys. **74**, 768-775 (2006).

[3] Calderón, S., Núñez, P. y Gil, S., Cámara digital como instrumento de laboratorio - estudio del tiro oblicuo, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 84-92 (2009).

[4] The Solar System Exploration – NASA <http://solarsystem.nasa.gov/index.cfm>. Consultada el 4 de marzo del 2009.

[5] Cowley, E. R., A classroom exercise to determine the Earth–Moon distance, Am. J. Phys. **57**, 351 (1989).

[6] Bruning, D. H., *Determining the Earth–Moon distance*, Am. J. Phys. **59**, 850 (1991)

[7] *The Eratosthenes Project*, actividad desarrollada como parte del World Year of Physics 2005, <http://www.physics2005.org/projects/eratosthenes/index.html>. Consultada el 13 de marzo de 2009. También Proyecto Eratóstenes del Dpto. de Física de la Universidad de Buenos Aires 2008: [http://difusion.df.uba.ar/joomla/index.php?option=com\\_frontpage&Itemid=1](http://difusion.df.uba.ar/joomla/index.php?option=com_frontpage&Itemid=1) Página consultada el 13 de marzo de 2009.

[8] Página de la Nasa <http://spaceplace.nasa.gov/sp/kids/>. Consultada el 13 de marzo de 2009

[9] <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/luna/luna.htm> Consultada el 11 de noviembre del 2008.

[10] Derman, S., *Aristarchus at your service*, Phys. Teach. **38(9)**, 574 (2000)

[11] Derman, S., *Correction: "Aristarchus at your service"*, Phys. Teach. **39(3)**, 113 (2001)

[12] Total Lunar Eclipse - February 20, 2008 registrado en Youtube, <http://www.youtube.com/watch?v=IVkkCVh5t0E>. Consultada el 11/03/2009.

[13] Existen numerosos programas que permiten simular un planetario en la computadora. Tanto comerciales (<http://www.skymaps.com/store/index.html>) como gratuitos (<http://www.winstars.net/english/index.html>). Winstar application. By Frank Richard. Franky Company. Versión 1.0.0.31. Consultada el 13 de marzo de 2009

[14] *Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln*. <http://astro.unl.edu/naap/ssm/modeling2.html> Página consultada el 4 de marzo del 2009

[15] Torres Arzayús, S., *Exploremos el Universo*, <http://astroverada.com/entrada.html>. Consultada el 4 de marzo del 2009

[16] Fiorenza, N. A., *The Lunar Planner, Venus Elongations & the Crescent Moon*,

<http://www.lunarplanner.com/HCpages/Venus-Moon.html> Consultada el 13 de marzo de 2009

[17] *Astronomía Dao* <http://personal.telefonica.terra.es/web/xgarciaf/heliocen/mecurio.htm>. Consultada el 13 de marzo de 2009

[18] Almanako de Rick Wiegmann Koshko, provee fechas de conjunciones, oposiciones y cuadratura de los planetas. [http://almanako.com/oppositions\\_quadratures.shtml](http://almanako.com/oppositions_quadratures.shtml). Consultada el 13 de marzo de 2009

**APÉNDICE**

**Períodos de la Luna.** El período *período sideral* de la Luna ( $T_{Sid}$ ) es el tiempo que la Luna tarde en dar 360° respecto de las estrellas lejanas. Este periodo es de 27,3216 días. Ver Fig. 11. Por su parte el *período sinódico* ( $T_{Luna}=29.53$  d), es el tiempo que tarda la Luna en volver a aparecer en el mismo punto del cielo relativo al Sol. De la Fig. 12, vemos que:

$$T_{Luna} = T_{Sid} + \frac{\theta}{360^{\circ}} T_{Luna} \quad (29)$$

O sea,

$$T_{Luna} = T_{Sid} \left/ \left( 1 - \frac{T_{Sid}}{T_{Tierra}} \right) \right. \quad (30)$$

O bien:

$$\frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Luna}} + \frac{1}{T_{Tierra}} \quad (31)$$

donde  $T_{Tierra}$  = Período sideral de la Tierra alrededor del Sol (365 d).

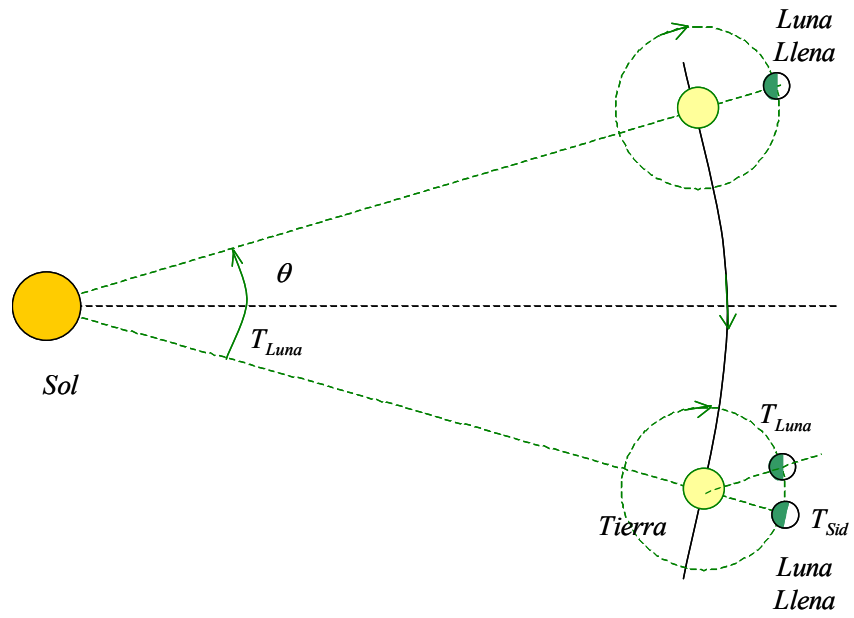
En general se puede probar, usando un argumento similar al formulado que la relación entre el período sideral ( $T_{Sid}$ ) de un planeta dado y su periodo sinodal ( $T_{Sin}$ ) viene dado por:

$$\frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Sin}} - \frac{1}{T_{Tierra}} \quad (32)$$

si  $T_{Sid} < T_{Tierra}$ , o sea si el planeta es interior a la órbita terrestre y

$$\frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Sin}} + \frac{1}{T_{Tierra}} \quad (33)$$

si  $T_{Sid} > T_{Tierra}$ , o sea si el planeta es exterior a la órbita terrestre.



**Figura 12.** Esquema que muestra las posiciones respectivas del Sol, la Tierra y el Sol.