

Introducción al fenómeno de Lente Gravitacional a partir de consideraciones de la Mecánica Clásica



Alejandro Hurtado^{1,2}, Arjuna Castrillón^{1,2}, Gonzalo Vargas^{1,2}

¹Grupo FISINFOR, Proyecto Curricular de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.

²Semillero SILAB, Proyecto Curricular de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.

E-mail: ahurtado@udistrital.edu.co

(Recibido el 30 de Marzo de 2010; aceptado el 22 de Abril de 2010)

Resumen

Desarrollando una simulación interactiva y recurriendo a principios de la mecánica de Newton, se logró describir la deflexión causada en haces de luz por diferentes arreglos de lentes gravitacionales, haciendo posible visualizar algunos efectos interesantes consecuencia de este fenómeno tales como la formación de imágenes múltiples, arcos y anillos de Einstein. Dicha herramienta favoreció una mejor comprensión y conceptualización de la situación física en estudio por parte de estudiantes de diferentes cursos de Física a nivel universitario.

Palabras clave: Métodos numéricos y simulaciones, Astronomía y Gravitación.

Abstract

Developing an interactive simulation and utilizing principles of Newtonian mechanics, describing the deflection was achieved in beams of light caused by gravitational lensing different arrangements, making it possible to visualize some interesting effects due to this phenomenon such as the formation of multiple images, arcs and Einstein rings. This tool facilitated a better understanding and conceptualization of the physical situation being studied by students of different courses in physics at the university level.

Keywords: Numerical Methods and simulations, Astronomy and Gravitation.

PACS: 98.80.-k, 95.30.Sf, 98.62.Sb.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Una de las consecuencias más interesantes de la Teoría General de la Relatividad es que en las cercanías de un cuerpo masivo se produce una deformación del espacio y del tiempo; de manera que la interacción gravitacional se manifiesta a través del cambio causado en la geometría del Universo. Dado que toda partícula existente está condicionada a la forma que toma el espacio a su alrededor, la luz también se ve afectada por la fuerza gravitacional, hecho que fue verificado experimentalmente por primera vez por Sir Arthur Eddington (1882-1944) en 1919 al presenciar un eclipse de sol en Puerto Príncipe África.

En sus observaciones, Eddington detectó un corrimiento aparente de la imagen de una estrella debido a que la masa del Sol desvió los haces de luz emitidos por la misma; a este efecto se le llamó deflexión. Igualmente, existen circunstancias especiales en las que un cuerpo celeste se encuentra entre una fuente luminosa y un observador (ubicado en la Tierra por ejemplo), de forma que, además de apreciarse un corrimiento de la imagen de

la fuente, se presentan otros efectos interesantes tales como la formación de dos o más imágenes de un mismo objeto, la evidencia de arcos y los llamados anillos de Einstein (Figura 1). Este fenómeno es conocido como Lente Gravitacional.



FIGURA 1. Formación de un anillo de Einstein. Imagen del Slacs Survey team.

Aunque el efecto de Lente Gravitacional fue predicho por Albert Einstein (1879-1955) en 1916 como una de las pruebas de la Teoría General de la Relatividad [1], el primer caso de formación de una imagen múltiple no fue observado sino hasta 1979 por el astrónomo Dennis Walsh (1933-2005), y el primer caso de formación de un anillo de Einstein hasta 1988 por Jacqueline Hewitt.

No obstante, desde mucho antes se especulaba que la gravedad tenía un efecto sobre la luz, en 1783 un astrónomo de nombre John Mitchell (1724-1793) envió a Henry Cavendish (1731-1810) un documento en el que exponía como calcular la masa de una estrella a partir de la deflexión que esta causaba sobre un haz de luz. En el desarrollo de este método Mitchell consideró únicamente el comportamiento corpuscular de la luz, y la interacción gravitacional como Newtoniana.

Entonces, dada la dificultad que se tiene al abordar este tópico de la Astrofísica en cursos introductorios de Física debido a su complejidad, se busca retomar esta aproximación introduciendo algunas consideraciones pertinentes para una correcta conceptualización del fenómeno por parte del estudiante. A continuación se realizará una breve descripción del aparato matemático utilizado en la modelación del fenómeno y la deducción del ángulo de deflexión, continuando con los efectos más representativos e interesantes y finalizando con los resultados obtenidos del desarrollo e implementación de una simulación interactiva en diferentes cursos de Física a nivel universitario.

II. MODELO TEÓRICO

Si se considera que el potencial gravitacional generado por el cuerpo celeste que actúa como deflector es del orden de $\Phi \ll c^2$, y las ecuaciones de propagación de los haces de luz son planteadas desde un marco de referencia inercial de Galileo, entonces es posible realizar un análisis del fenómeno de Lente Gravitacional a partir de consideraciones de la Mecánica Clásica. Dentro de esta aproximación se tendrá únicamente en cuenta el comportamiento corpuscular de la luz y se recurrirá a los fundamentos de la Óptica Geométrica.

Aunque esta aproximación no presenta ninguna inconsistencia teórica, difiere en la interpretación que se le da al fenómeno; de forma que, desde el punto de vista de la Mecánica Clásica el fenómeno es abordado como un problema de dos cuerpos bajo interacción gravitacional, mientras que en Relatividad General el fenómeno se debe a que los haces de luz están confinados a la geometría que toma el espacio y el tiempo alrededor del cuerpo deflector.

Considérese la situación ilustrada en la Figura 2. Se tiene una fuente luminosa, la cual emite haces de luz que se propagan en el espacio con simetría esférica y a la velocidad de la luz en el vacío. Dicha fuente está ubicada a una distancia D_S de un observador que se encuentra a una posición r_o con respecto a un marco de referencia inercial.

Debido a la presencia de un cuerpo de masa M ubicado a una distancia D_L del observador y a una distancia D_{LS} de la fuente luminosa, los haces de luz son desviados proporcionalmente al campo gravitacional generado por este cuerpo.

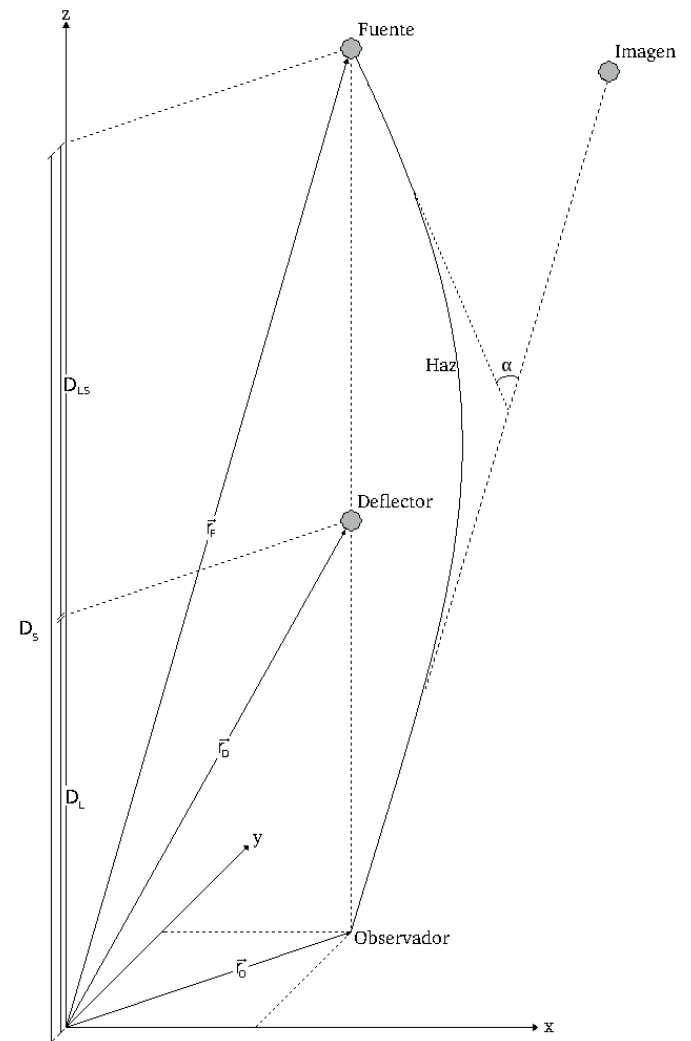


FIGURA 2. Sistema Observador-Deflector-Fuente, viajando a lo largo del espacio alrededor de estos cuerpos, un haz luminoso emitido por la fuente.

La fuerza de atracción gravitacional que el deflector ejerce sobre un i-ésimo haz es de la forma:

$$\vec{F}_{Gi} = \frac{GMm}{D_i^3}(\vec{r}_D - \vec{r}_i), \quad (1)$$

expresión conocida como la ley de Gravitación Universal de Newton. Donde M y r_D son la masa y posición del deflector respectivamente, $G=6,678 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ es la constante de Cavensish, r_i es la posición del i-ésimo haz, m es la masa asociada al haz (que como se verá más adelante no es necesaria, y:

$$D_i = \sqrt{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2}, \quad (2)$$

es la distancia entre el haz y el deflector. Con:

$$\vec{r}_D = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k} \quad (3)$$

$$\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k} \quad (4)$$

Al plantear la segunda ley de Newton para el haz se llega a:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{GM}{D_i^3}(\vec{r}_D - \vec{r}_i) \quad (5)$$

El principio de Equivalencia establece que la aceleración que experimenta un cuerpo debido a la atracción gravitacional de la Tierra por ejemplo, es independiente de su masa. Entonces nótese que aunque no se tenga un valor de masa asociado a un haz luminoso, aun así se ven afectados por los campos gravitacionales.

En general, para un deflector compuesto por N partículas, la aceleración experimentada por un i-ésimo haz debida a la contribución gravitacional de cada uno de los cuerpos que componen el deflector, está dada por:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{j=0}^N \frac{M_j}{D_{ij}^3}(\vec{r}_{Dj} - \vec{r}_i) \quad (6)$$

donde, M_j es la masa de la j-ésima partícula, R_{Dj} su posición y D_{ij} la distancia entre esta y el i-ésimo haz.

La expresión (6) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y lineal cuya solución arrojará como resultado la ecuación de propagación de la luz en aproximación clásica.

III. ÁNGULO DE DEFLEXIÓN

Debido al valor de la velocidad de la luz en el vacío, un haz luminoso describe una trayectoria hiperbólica alrededor del deflector, de forma que su ecuación de movimiento es análoga a la ecuación de una cónica, y es de la forma [2]:

$$r_i = \frac{D_{ij}(e+1)}{1+e \cos \varphi} \quad (7)$$

con e la excentricidad de la órbita, y φ el azimut, ambas cantidades medidas desde el cuerpo central. De la misma forma, de la conservación del momentum angular y para el caso de órbitas cónicas, se tiene que:

$$r_i \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{GMD_{ij}(1+e)} \quad (8)$$

Se denomina deflexión a la desviación que sufren los haces de luz al pasar por las cercanías del deflector, aunque esta desviación se da a lo largo de toda la

trayectoria del haz, dentro de esta aproximación se considerará que la deflexión únicamente se produce al pasar por el plano del deflector (Figura 3). Dado que este efecto es independiente de la longitud de onda, se considera monocromático.

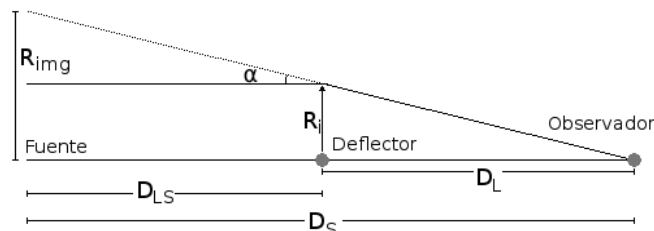


FIGURA 3. Corrimiento aparente de la posición de una fuente luminosa. Cuando la distancia entre el observador y la fuente es considerable, los rayos ópticos se consideran paralelos entre sí.

El ángulo de deflexión α es una medida de la desviación en la trayectoria del haz, tal y como se puede apreciar en la figura 2. Es posible demostrar geoméricamente (la deducción puede ser consultada en [3]) y partiendo de las ecuaciones (7) y (8) que:

$$\alpha = \frac{2GM}{Rc^2} \quad (9)$$

con R la distancia entre el haz y el deflector. Este resultado fue expuesto por primera vez por el astrónomo alemán Johan Soldner (1776-1833) en 1804 y luego por Einstein en 1911. Para el caso de un haz que pasa por la superficie del Sol se tiene el ángulo de deflexión es:

$$\alpha_s = \frac{2GM_s}{R_s c^2} \approx 0.875 \text{ arc sec} \quad (10)$$

donde la masa y el radio del Sol son: $M_s = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ y $R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, y arcsec corresponde a segundos de arco.

A. Campo de deflexión

La desviación que experimenta un haz varía proporcionalmente al potencial gravitacional generado por el cuerpo deflector y a su distancia de separación con respecto al mismo. Entonces, la deflexión es máxima en las cercanías del deflector, y decrece a medida que el haz se aleja de este. El campo de deflexión se calcula superponiendo el valor del ángulo de deflexión punto por punto a lo largo del plano del deflector (Figura 4).

IV. FORMACIÓN DE LA IMAGEN

Debido al efecto de lente gravitacional, la gran mayoría de las imágenes captadas de cuerpos celestes distantes suelen

estar distorsionadas [4]. Existen casos registrados en los que se observan dos o más imágenes de una misma fuente, esto se debe a que la deflexión se presenta de forma tal que varios haces luminosos llegan a un mismo observador. Un caso particular se presenta cuando se forman cuatro imágenes múltiples que en conjunto componen la denominada cruz de Einstein (Figura 5).

El corrimiento aparente de la imagen de la fuente es proporcional al ángulo de deflexión y es igual a:

$$R_{img} = R_i + D_{LS} \tan \alpha , \quad (11)$$

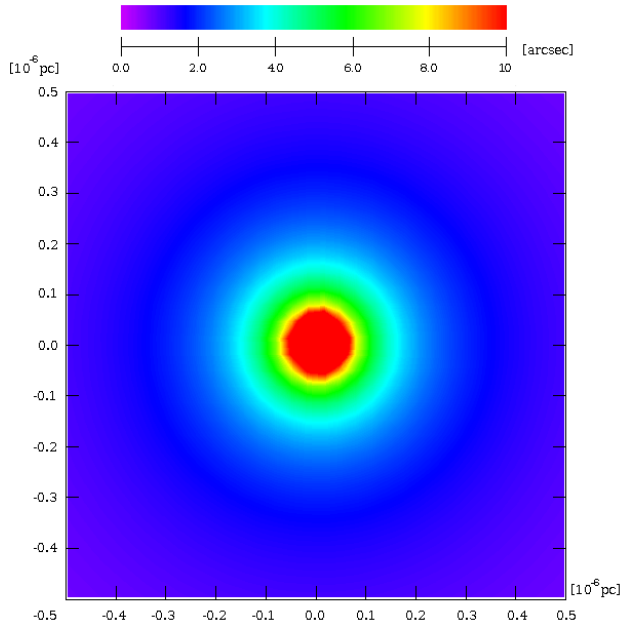


FIGURA 4. Campo de deflexión ocasionado por un deflector puntual de masa tres veces la del Sol. Campo escalar generado con la simulación desarrollada por los autores.

En general, para que se forme una imagen múltiple se debe cumplir que:

$$|R_i - D_L \tan \alpha| \cong 0 . \quad (12)$$

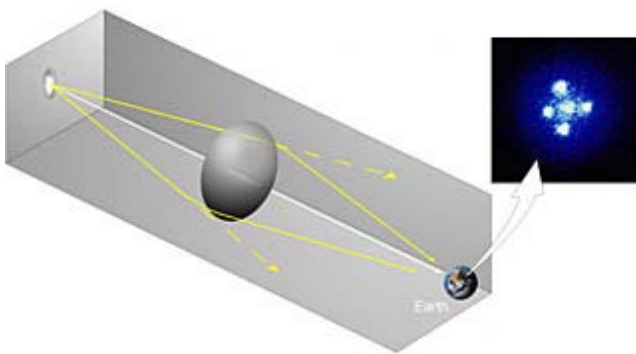


FIGURA 5. Formación de una Cruz de Einstein (Imagen tomada de: <http://images.encarta.msn.com/xrefmedia/sharemed/targets/images>).

Estas dos últimas condiciones son consecuencia directa de la descripción de la trayectoria de los haces a partir de principios de la Óptica Geométrica (Aproximación de lente delgada).

V. EFECTOS INTERESANTES

Einstein mostró teóricamente en 1936 que sí el observador, el deflector y la fuente luminosa se encuentran exactamente alineados, no se detectará la formación de imágenes múltiples sino que se formará un anillo alrededor del deflector ocasionado por la distorsión en la imagen original de la fuente (Figura 6). Dicho fenómeno se conoce como anillo de Einstein y en aproximación clásica su radio se define como:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{2GM}{Dc^2}} , \quad (13)$$

y D se define como la distancia efectiva de lente:

$$D = \frac{D_L D_S}{D_{LS}} . \quad (14)$$

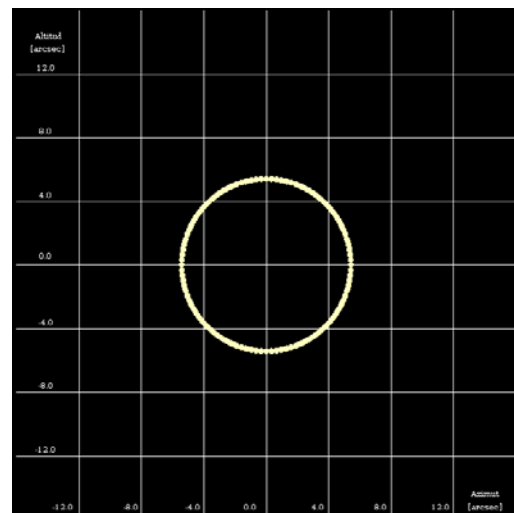


FIGURA 6. Anillo de Einstein formado por un deflector puntual de masa tres veces la del Sol.

Sin embargo, si el observador, el deflector y la fuente no se encuentran alineados, se forman arcos y otro tipo de figuras dependiendo de la estructura del cuerpo deflector (Figura 10d).

VI. SIMULACIÓN INTERACTIVA

Una simulación interactiva es una herramienta informática que mediante una interfaz gráfica aplicada al desarrollo de un modelo físico, representa y ambienta visualmente la evolución de un determinado fenómeno, haciendo más clara la relación entre las variables involucradas, y

familiarizando al estudiante con actividades propias de la investigación científica tales como la construcción de modelos, la dependencia del fenómeno en estudio con las variables involucradas mediante el ejercicio de modificar parámetros y condiciones iniciales [5].

El empleo de esta herramienta en el aula a fomentado en el estudiante una mejor comprensión de aquellos sistemas físicos en los que se hace necesario un mayor grado de abstracción y cuya evolución resulta difícil de visualizar [6]. Para que resulten pedagógicamente efectivas, deben ofrecer los elementos suficientes para que el estudiante sea capaz de asimilar las leyes físicas presentadas, a partir de un proceso de postulación de hipótesis y verificación de las mismas, tal y como lo afirma Hake en [7]. De este continuo ejercicio, el estudiante gana un conocimiento más profundo y fortalece su pensamiento hipotético-deductivo analizando por su propia cuenta el fenómeno físico en estudio [8].

Se implementó una simulación interactiva en Java mediante el empleo de la versión 4.10 del paquete Easy Java Simulation. Se desarrolló la correspondiente solución numérica a la ecuación (6) usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, considerando como condiciones iniciales de posición y velocidad la ubicación espacial del deflector y la velocidad de la luz en el vacío $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$, respectivamente. A partir de este método iterativo se logró describir la propagación de la luz emitida por la fuente al pasar por el cuerpo deflector al que se le asociaron diferentes simetrías, tales como: Puntual, Binario, Polar, Axial, Toroidal, entre otras. Esto con el fin de ilustrar desde los efectos más simples hasta los casos con perturbaciones que hacen parte del fenómeno de lente gravitacional.

A partir del modelo matemático desarrollado, se logró obtener el campo de deflexión para cuerpos con diferentes simetrías y en diferentes configuraciones (Figura 8). A los valores del ángulo de deflexión se les asocio un índice de color de manera que el violeta corresponde a aquellos valores cercanos a cero y el rojo al valor máximo. Igualmente, de la simulación se logró obtener la distorsión de la imagen detectada por el observador y ocasionada por las diferentes simetrías de los cuerpos celestes deflectores (Figura 10).

Cada una de las configuraciones predeterminadas en la simulación se generaron a través de la teoría de la percolación, de manera que los diferentes cuerpos celestes tales como galaxias y cúmulos de galaxias se construyen a partir de una distribución aleatoria de cuerpos discretos a los que se le asocian diferentes simetrías. Dentro de este modelo, no se tuvo en cuenta la interacción gravitacional entre las partículas que componen el cuerpo deflector y se despreciaron todo tipo de fuerzas de carácter disipativo. Se introdujeron tres diferentes pestañas dentro de la simulación, las cuales permiten visualizar la propagación de la luz en el espacio, el campo de deflexión a lo largo del plano del cuerpo deflector, y la formación de la imagen (Figura 7).

VII. IMPLEMENTACIÓN

La simulación se aplicó en los cursos de Astronomía y Tópicos de Física Actual de la Licenciatura en Física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en una sesión de dos horas en la que se expuso la historia, los principios básicos de este fenómeno y aquellos aspectos conceptuales que permitieron introducir a los estudiantes a la aproximación teórica desarrollada y a las diferentes actividades realizadas, tales como talleres interactivos incluidos dentro de la herramienta, un test de diagnóstico y finalmente una encuesta que permitió validar la efectividad de la herramienta (Figura 9).

El total de estudiantes encuestados fue de 55, todos con conocimientos previos de Ecuaciones Diferenciales, Mecánica Clásica y Óptica Geométrica.

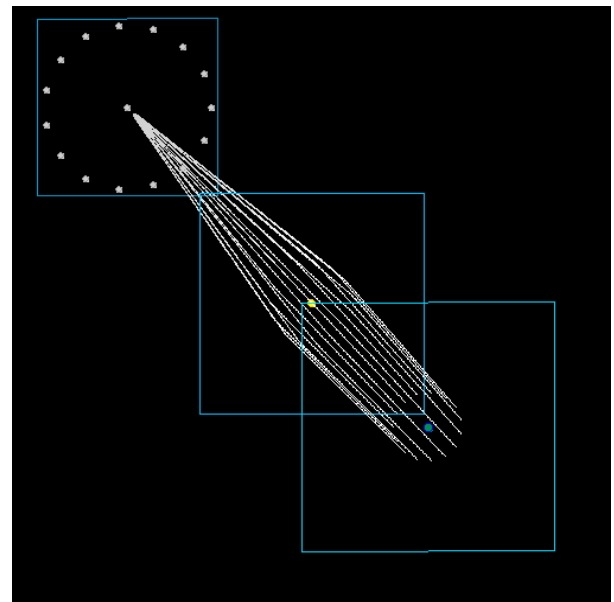


FIGURA 7. Aspecto de la simulación interactiva. En esta pestaña de la simulación se visualiza la propagación de los haces luminosos y la desviación que sufren por acción del cuerpo deflector.

VIII. RESULTADOS

La mayor parte de los estudiantes que interactuaron con la herramienta desconocían la existencia de este fenómeno, mientras que los demás habían tenido un acercamiento muy superficial al mismo en sus cursos anteriores, esta información de corroboró con las encuestas que se realizaron a lo largo de la sesión.

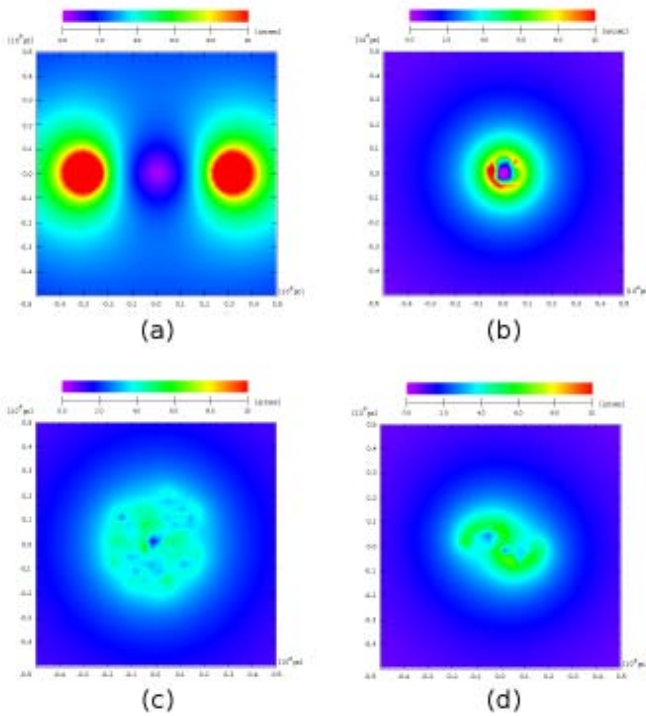


FIGURA 8. Campo de deflexión generado por cuerpos con diferentes simetrías: (a) Arreglo binario. (b) Deflector Toroidal. (c) Deflector de simetría polar. (d) Deflector análogo a una galaxia espiral.



FIGURA 9. Estudiante manipulando la simulación y visualizando la formación de un anillo de Einstein.

Acorde a las respuestas obtenidas de las actividades realizadas, es posible afirmar que cerca de un 95% de los estudiantes lograron comprender de manera clara y precisa los principios físicos que hacen posible el efecto de lente gravitacional al igual que sus efectos más significativos. De manera que la simulación cumplió satisfactoriamente con su finalidad, presentando una buena navegabilidad, una visualización clara del fenómeno, y un amplio contenido epistemológico y técnico del tema, claro está, dentro de las aproximaciones consideradas.

Dado que en la mayoría de los casos los diferentes cuerpos celestes tienen formas irregulares y en conjunto forman todo un sinnúmero de diferentes simetrías, la imagen producida por estos cuerpos va a ser de forma irregular también. En la Figura 11 se visualiza la distorsión ocasionada en una fuente puntual por un deflector espiral y en la Figura 12 se muestra un paralelo entre la distorsión ocasionada por un deflector de simetría irregular y un efecto detectado a escala celeste.

Finalmente, en la Figura 13 se muestran las curvas de *radio de Einstein vs distancia efectiva de lente* para diferentes valores de masa de un deflector puntual. Dichas curvas fueron construidas de manera estadística y a partir de la recopilación de más de 10.000 datos numéricos obtenidos con la simulación.

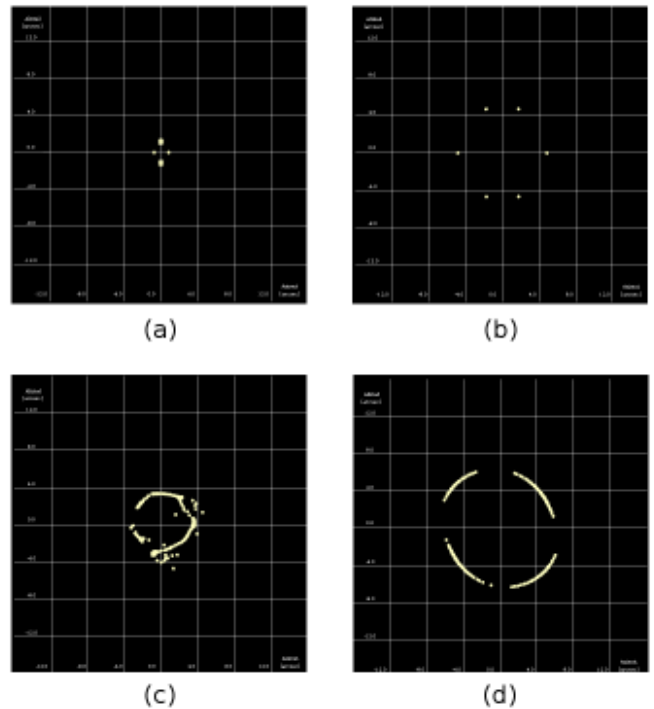


FIGURA 10: Formación de la imagen de la fuente luminosa: (a) Formación de una cruz de Einstein. (b) Imágenes múltiples que en conjunto forman un hexágono. (c) Imagen irregular debida a un deflector polar. (d) Formación de arcos.

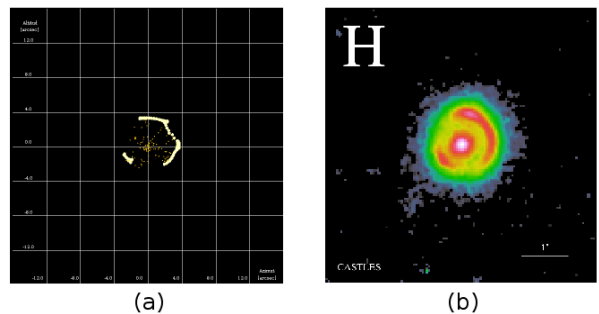


FIGURA 12: (a) Deflector Polar. (b) Sistema BO631+519 (Imagen tomada de: www.cfa.harvard.edu/castles)

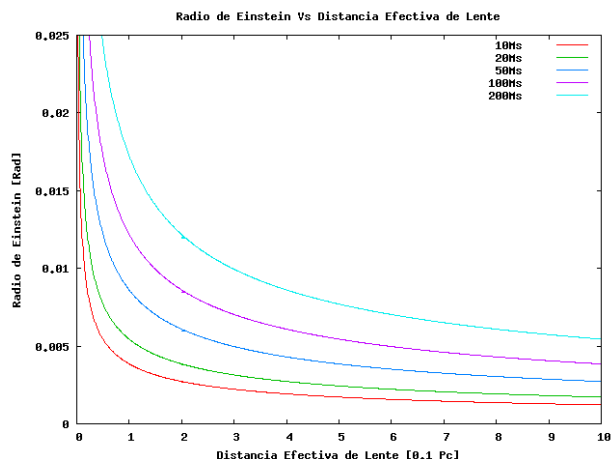


Figura 13: Radio de Einstein vs distancia efectiva de lente para diferentes valores de masa de un deflector puntual.

VII. CONCLUSIONES

Las consecuencias más interesantes del efecto de Lente Gravitacional van desde el corrimiento aparente de la imagen de un cuerpo celeste, la formación de dos o más imágenes de un mismo objeto, hasta la formación de arcos y anillos de Einstein. En la actualidad, los astrónomos utilizan este fenómeno para realizar mediciones de la estructura a gran escala del universo, su estado milésimas de segundo después del Big Bang, y realizar predicciones tales como la existencia de Materia y Energía Oscura.

Una formulación completa de este fenómeno exige la aplicación de las ecuaciones de campo de la Teoría General de la Relatividad [9], y dado que esta formulación no está al alcance de un curso de Física universitario, la aproximación aquí desarrollada, en la que el fenómeno es resuelto como un problema de N cuerpos, constituye una metodología que ofrece al estudiante la posibilidad de introducirse y comprender este tópico de la Astronomía a partir de analogías con la Óptica Geométrica y con la Mecánica Clásica.

Adicionalmente, desarrollando y aplicando una simulación interactiva como complemento a esta aproximación, se logró generar una mejor disposición en la comprensión de

este tópico, y fortalecer las capacidades de aprendizaje del estudiante, brindándole la posibilidad de involucrarse activamente con las variables y condiciones que rigen este fenómeno bajo esta aproximación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a todos los estudiantes y docentes de Licenciatura en Física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por sus aportes en la ejecución de este estudio, y al grupo de investigación FISINFOR por sus significativas sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] Einstein A., *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Ann. Der Phys.* **49**, 769 (1916).
- [2] Portilla J., *Elementos de Astronomía de Posición* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2001).
- [3] Meneghetti M., *Introduction to Gravitational Lensing*, <www.ita.uni-heidelberg.de/~massimo/sub/Lectures/glall.pdf>, consultado el 12 de Octubre de 2009.
- [4] Bartelmann M., Schneider, P., *Weak Gravitational Lensing*, *Phys. Rep.* **340**, 291-472 (2001).
- [5] Hurtado A., Lombana C., Fonseca M. y Ocaña C., *Experimento y Simulación* (Fondo de Publicaciones Universidad Distrital, 1ra Edición, Bogotá, 2006).
- [6] Esquembre F., *Creación de Simulaciones Interactivas en Java* (Pearson Prentice Hall, Madrid, 2005).
- [7] Hake, R., *Interactive engagement vs. traditional methods: a six-thousand student survey of mechanics test data for introductory physics*, *Am. J. Phys.* **66**, 64-74 (1998).
- [8] Hurtado, A. *FÍSICA E INFORMÁTICA: Una opción didáctica integradora en la enseñanza aprendizaje de la física*. (Memorias Simposio Centroamericano y del Caribe de Física XXVIII CURCCAF. San José, Costa Rica, (2009).
- [9] Einstein A., *Sobre la Teoría Especial y la Teoría General de la Relatividad* (Alianza Editores, Madrid, 1961).